

非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式における散逸関数の長時間挙動

日本大学大学院理工学研究科数学専攻博士後期課程 1 年

荒木 康太 (Kouta Araki) *

概要

非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式をノイマン境界条件の下で考える。この方程式は、自由エネルギー、エネルギー則、および連続の方程式を基に構築された方程式である。エネルギー則によれば、自由エネルギーの減衰は散逸関数によって決定される。拡散係数が定数の場合、Carrillo-Jüngel-Markowich-Toscani-Unterreiter によって、散逸関数の長時間挙動および解の L^1 ノルムでの長時間挙動が研究されている。本講演では、拡散係数が定数でない場合について、散逸関数が指数減衰するための十分条件を考察する。

1 導入

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界を持つ有界凸領域、 ν を $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル、 $\alpha > 1$ を定数とする。以下の非線形 Fokker-Planck 方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla(\alpha d(x) \rho^{\alpha-1} + \phi(x))) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), & x \in \Omega, \\ \rho \nabla(\alpha d(x) \rho^{\alpha-1} + \phi(x)) \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \quad (\text{NFP})$$

ここで、 $d = d(x): \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x): \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\rho_0: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた関数である。以下 $d, \phi \in C^2(\bar{\Omega})$ かつ、 $\bar{\Omega}$ 上 $d, \rho_0 > 0$ であり、

$$\int_{\Omega} \rho_0 dx = 1 \quad (1)$$

を仮定する。(1) の仮定は (NFP) が確率微分方程式と関係があることに由来する。

$$\mu := \alpha d(x) \rho^{\alpha-1} + \phi(x) \quad (2)$$

とすると (NFP) は連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla \mu) = 0 \quad (3)$$

とかきかえられる。 $u := -\nabla \mu$ は速度場を表す。 d が定数のとき、

$$\operatorname{div}(\rho \nabla(\alpha d \rho^{\alpha-1})) = (\alpha - 1) d \Delta \rho^{\alpha} = \operatorname{div}((\alpha - 1) d \nabla \rho^{\alpha}) \quad (4)$$

* E-mail: csku24001@g.nihon-u.ac.jp

が成り立つから (NFP) は多孔質媒質型の非線形拡散となる。他方, d が定数でないとき, (4) の 3 つの項はすべて異なる。連続の方程式は, 質量保存則に関係のある重要な方程式の一つであることから, 本研究では, 連続の方程式を基礎にした非線形拡散を考察する。

Gauss の発散定理から以下が成り立つ。

補題 1.1. ρ は (NFP) の正值な古典解とする。このとき,

$$\int_{\Omega} \rho_0 dx = \int_{\Omega} \rho dx = 1 \quad (5)$$

となる。

次に自由エネルギーを

$$\mathcal{F}[\rho](t) := \int_{\Omega} (d(x)\rho^\alpha + \rho\phi(x)) dx$$

と定義する。(NFP) と部分積分により

命題 1.2. ρ は (NFP) の正值な古典解とすると

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\rho](t) = - \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx =: -\mathcal{D}[\rho](t) \leq 0 \quad (6)$$

が成り立つ。

ここで定義された $\mathcal{D}[\rho](t)$ は自由エネルギーの散逸関数と呼ばれる。(6) を両辺 $t \in [0, T]$ で積分すると, 以下の積分型のエネルギー則

$$\mathcal{F}[\rho](T) + \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 \rho dx dt = \mathcal{F}[\rho](0) \quad (7)$$

が成り立つ。ここで, $\mathcal{F}[\rho](0)$ が上に有界とする。このとき, $T \rightarrow \infty$ としたとき, 左辺の 2 項目の広義積分が収束するため, ある単調増加な点列 $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ が存在して,

$$t_j \rightarrow \infty, \quad \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty \quad (8)$$

が成り立つ。本稿では,

$$\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (9)$$

が成り立つための条件を考察する。 d が定数で, ϕ が強凸関数のとき, [5, 1] のエントロピー消散法によれば (9) の指数オーダーでの収束並びに ρ の L^1 ノルムの長時間挙動が研究されている。他方 $\alpha = 1$ に対する (NFP) の問題は $\rho^{\alpha-1}$ を $\log \rho$ に変えた問題, すなわち

$$\rho_t - \operatorname{div}(\rho \nabla (d(x) \log \rho + \phi(x))) = 0$$

を考えることになる。 d が定数の時は線形拡散となり, エントロピー消散法が有効である [5]。一方 d が定数でないとき, [2] で (7) をみたす方程式の導出と周期境界条件における (9) が考察されている。 d が x の関数, すなわち不均一な拡散をもつ Fokker-Planck 方程式においては,

$$\rho \nabla (d \log \rho + \phi) = d \nabla \rho + \rho \log \rho \nabla d + \rho \nabla \phi$$

となるから、 $\alpha = 1$ であっても非線形方程式になることに注意する。本講演では $\alpha > 1$ の場合、すなわち、多孔質媒質型の非線形拡散において (9) が指数オーダーで収束するための d の条件を ρ が (NFP) の $\bar{\Omega}$ 上正値で有界な古典解である仮定の下で導出する。

定理 1.3. $n = 1, 2, 3$ と仮定する。ある正の定数 $\lambda > 0$ が存在して、 $\nabla^2 \phi \geq \lambda I$ が成り立つとする。ここで I は単位行列、 $\nabla^2 \phi$ は ϕ の Hesse 行列である。 $\nabla d, \nabla \phi$ は有界とする。 ρ はある正の定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して、

$$C_1 \leq \rho \leq C_2 \quad (10)$$

を満たす時間大域的古典解とする。このとき、ある正の定数 $C_3, C_4, C_5 > 0$ が存在して

$$d(x) \geq C_3, \quad \int_{\Omega} |\nabla \mu(x, 0)|^2 \rho_0 dx \leq C_4 \quad (11)$$

が成り立つならば、

$$\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx \leq C_5 e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \quad (12)$$

が成り立つ。

注意 1.4. 定理 1.3 から、

$$\nabla \mu \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

が得られる。

定理 1.3 では d を大きくとる必要がある。しかし、 C_1, C_2 は一般に d に依存する。そのため、 C_1, C_2 が d にどのように依存するかを調べる必要がある。また、(NFP) は

$$\operatorname{div}(\alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\nabla \rho)$$

の項が存在するため、退化型拡散方程式となる。熱方程式とは異なり、 $\rho_0 \geq 0$ であっても、(NFP) の解の正値性は一般には成り立たないことが知られている。我々は μ に関する方程式を考察することで次の結果を得た。

定理 1.5. ρ を (NFP) の時間大域的古典解とする。 $\alpha d \rho_0^{\alpha-1} > \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y) - \phi$ が成り立つとき、

$$C_1 \leq \rho \leq C_2 \quad (13)$$

が成り立つ。ただし、 C_1, C_2 は

$$C_1 = \left(\frac{\min_{y \in \bar{\Omega}} (\alpha d(y) \rho_0^{\alpha-1}(y) + \phi(y)) - \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y)}{\alpha \max_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$C_2 = \left(\frac{\max_{y \in \bar{\Omega}} (\alpha d(y) \rho_0^{\alpha-1}(y) + \phi(y)) - \min_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y)}{\alpha \min_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

で与えられる正の定数である。

注意 1.6. ある正の定数 C が存在して

$$\frac{\min_{y \in \bar{\Omega}} d(y)}{\max_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} > C$$

を仮定すれば,

$$C_1 \geq \left(C \min_{y \in \bar{\Omega}} \rho_0^{\alpha-1}(y) + \frac{\min_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y) - \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y)}{\alpha \max_{y \in \bar{\Omega}} d(y)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

が成り立つ. d を大きくとることによって $C_1 > 0$ となる. 同様に C_2 の d に関する有界性も得られる.

2 主定理の証明

2.1 定理 1.3 の証明

$\mathcal{F}$ の t での 2 階導関数を $\mathcal{F}$ の t に関する 1 階導関数で下から評価する. そして, Gronwall 型の不等式を導き, 指数減衰を示す. [5] の計算を参考にすると以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) &= 2 \int_{\Omega} (\nabla \mu \cdot \nabla^2 \phi \nabla \mu) \rho \, dx + 2(\alpha - 1) \int_{\Omega} d(x) |\nabla^2 \mu|^2 \rho^{\alpha} \, dx \\ &\quad + 2(\alpha - 1)^2 \int_{\Omega} d(x) (\Delta \mu)^2 \rho^{\alpha} \, dx - (\alpha - 1) \int_{\partial \Omega} d(x) \rho^{\alpha} \nabla |\nabla \mu|^2 \cdot \nu \, d\sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} (\nabla d(x) \cdot \nabla^2 \mu \nabla \mu) \rho^{\alpha} \, dx - 2(2\alpha - 1) \int_{\Omega} (\nabla d(x) \cdot \nabla \mu) \Delta \mu \rho^{\alpha} \, dx \\ &\quad - 2\alpha \int_{\Omega} (\nabla d(x) \cdot \nabla \mu) (\nabla \rho \cdot \nabla \mu) \rho^{\alpha-1} \, dx \\ &=: 2I_1 + 2(\alpha - 1)I_2 + 2(\alpha - 1)^2I_3 - (\alpha - 1)I_4 - I_5 - 2(2\alpha - 1)I_6 - 2\alpha I_7. \end{aligned} \tag{14}$$

Ω が有界凸領域であることと Neumann 境界条件から $I_4 \leq 0$ がなりたつ. また, 定理 1.3 の $\nabla^2 \phi \geq \lambda I$ 仮定から,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) \geq 2\lambda \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx + 2(\alpha - 1)I_2 + 2(\alpha - 1)^2I_3 - I_5 - 2(2\alpha - 1)I_6 - 2\alpha I_7 \tag{15}$$

が成り立つ. d が x に依存する関数なので [5] と違い, I_5, I_6, I_7 の項が現れる. これを処理するために, 以下の補題を用意する.

補題 2.1. ρ は (NFP) の有界で正值な時間大域的古典解とする. 任意の $\delta_1 > 0$ に対して

$$\int_{\Omega} (\nabla d(x) \cdot \nabla^2 \mu \nabla \mu) \rho^{\alpha} \, dx \leq \frac{\|\nabla d\|_{\infty} \|\rho^{\alpha-1}\|_{\infty}}{4\delta_1 \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx + \delta_1 \|\nabla d\|_{\infty} \int_{\Omega} d(x) |\nabla^2 \mu|^2 \rho^{\alpha} \, dx$$

が成り立つ.

証明. $\rho > 0$ であることから, 積分の三角不等式より以下が成り立つ.

$$\int_{\Omega} (\nabla d(x) \cdot \nabla^2 \mu \nabla \mu) \rho^{\alpha} \, dx \leq \int_{\Omega} |(\nabla d(x) \cdot \nabla^2 \mu \nabla \mu)| \rho^{\alpha} \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla d(x)| |\nabla^2 \mu| |\nabla \mu| \rho^{\alpha} \, dx.$$

Hölder の不等式と Young の不等式から任意の $\delta_1 > 0$ に対して以下が成り立つ.

$$\int_{\Omega} |\nabla d(x)| |\nabla^2 \mu| |\nabla \mu| \rho^\alpha dx \leq \frac{1}{4\delta_1} \int_{\Omega} \frac{1}{d(x)} |\nabla d(x)| |\nabla \mu|^2 \rho^\alpha dx + \delta_1 \int_{\Omega} |\nabla d(x)| d(x) |\nabla^2 \mu|^2 \rho^\alpha dx.$$

$d(x) > 0$ かつ, $\nabla d(x)$, ρ は有界であるから,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{d(x)} |\nabla d(x)| |\nabla \mu|^2 \rho^\alpha dx &\leq \frac{\|\nabla d(x)\|_\infty \|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{\min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx, \\ \int_{\Omega} |\nabla d(x)| d(x) |\nabla^2 \mu| \rho^\alpha dx &\leq \|\nabla d(x)\|_\infty \int_{\Omega} d(x) |\nabla^2 \mu|^2 \rho^\alpha dx \end{aligned}$$

が成り立つ. まとめると,

$$\int_{\Omega} (\nabla d(x) \cdot \nabla^2 \mu \nabla \mu) \rho^\alpha dx \leq \frac{\|\nabla d(x)\|_\infty \|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4\delta_1 \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx + \delta_1 \|\nabla d(x)\|_\infty \int_{\Omega} d(x) |\nabla^2 \mu|^2 \rho^\alpha dx$$

が得られる. $\square$

(2.1) より

$$|I_5| \leq \frac{\|\nabla d\|_\infty \|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4\delta_1 \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx + \delta_1 \|\nabla d\|_\infty I_2$$

となるから δ_1 を $\delta_1 \|\nabla d\|_\infty = (\alpha - 1)$ を満たすように十分小さくとることで

$$2(\alpha - 1)I_2 - I_5 \geq (\alpha - 1)I_2 - \frac{\|\nabla d\|_\infty^2 \|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4(\alpha - 1) \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx \quad (16)$$

となる. I_6 の積分について, 非負値の $2(\alpha - 1)^2 I_3$ の項を用いて同様に計算することで

$$2(\alpha - 1)^2 I_3 - 2(2\alpha - 1)I_6 \geq -\frac{(2\alpha - 1)\|\nabla d\|_\infty^2 \|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4(\alpha - 1)^2 \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx \quad (17)$$

とできる. I_7 は $\nabla \rho$ を含む, $\mu = \alpha d(x) \rho^{\alpha-1} + \phi(x)$ であるから, $\nabla \mu$ には $\nabla \rho$ の項が現れる. $\nabla d(x)$, $\nabla \phi(x)$ が有界, $d(x)$ が有界な正值関数であることを用いると, I_7 は以下のように下から評価される.

補題 2.2. ρ を (NFP) の正值で有界な時間大域的古典解, ∇d と $\nabla \phi$ は有界な関数, $d(x)$ は有界な正值関数とする. このとき,

$$\begin{aligned} -2\alpha \int_{\Omega} (\nabla d(x) \cdot \nabla \mu) (\nabla \rho \cdot \nabla \mu) \rho^{\alpha-1} dx &\geq -\frac{2\|\nabla d\|_\infty}{(\alpha - 1) \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^3 \rho dx \\ &\quad - \frac{2\|\nabla d\|_\infty \|\nabla \phi\|_\infty}{(\alpha - 1) \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho dx \end{aligned} \quad (18)$$

が成り立つ.

I_7 に現れる $|\nabla \mu|^3$ の項を扱うために, 次の Sobolev-Poincare 型の不等式を考える.

命題 2.3 (Sobolev-Poincare 型の不等式). ρ を (NFP) の $\bar{\Omega}$ 上の正值で有界な時間大域的古典解とする. Sobolev 指数 p^* を $n \geq 3$ のときは $\frac{1}{p^*} := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2$ のときは $1 \leq p^* < \infty$ とする. このとき, ある正の定数 $C_6 > 0$ が存在して, ベクトル場 $\mathbf{v} \in C^1(\Omega)$ に対して以下が成り立つ.

$$\left(\int_{\Omega} |\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}|^{p^*} \rho dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_6 \left(\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 \rho dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで, $\bar{v}$ は積分平均とする.

証明. p^* が Sobolev 指数であることから Sobolev-Poincare 不等式より ([4, p.174], [6, Theorem4.3])

$$\left(\int_{\Omega} |v - \bar{v}|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_7 \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つことに注意する. $C_1 < \rho < C_2$ と, [4, p.174] と [6, Theorem4.3] を組み合わせると

$$\left(\int_{\Omega} |v - \bar{v}|^{p^*} \rho dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{\Omega} |v - \bar{v}|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2^{\frac{1}{p^*}} C_7 \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_2^{\frac{1}{p^*}} C_7}{C_1^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

が得られる. $C_6 := \frac{C_2^{\frac{1}{p^*}} C_7}{\sqrt{C_1}}$ とすればよい. □

Sobolev-Poincare 型不等式から, 次の補間不等式を示す.

命題 2.4. $n = 1, 2, 3$ のとする, ρ は (NFP) の $\bar{\Omega}$ 上の正值で有界な時間大域的古典解とする. ある定数 $C_8, C_9, C_{10} > 0$ が存在してベクトル場 $v \in C^1(\Omega)$ に対して

$$\int_{\Omega} |v|^3 \rho dx \leq C_8 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho dx + C_9 \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho dx \right)^3 + C_{10} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho dx \right)^{\frac{3}{2}}$$

が成り立つ.

証明. $a + b = 1$ となる $a, b > 0$ に対して, $p > 1$ の dual index を p' とする. Hölder の不等式から,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v|^3 \rho dx &\leq \left(\int_{\Omega} |v|^{3ap} \rho dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^{3bp'} \rho dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |v - \bar{v} + \bar{v}|^{3ap} \rho dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^{3bp'} \rho dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq 2^{\frac{3a-1}{p}} \left(\left(\int_{\Omega} |v - \bar{v}|^{3ap} \rho dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |\bar{v}|^{3ap} \rho dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_{\Omega} |v|^{3bp'} \rho dx \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned} \quad (19)$$

が成り立つ. (19) の右辺の 1 項目を考える. $3ap = p^*$ が成り立つと仮定する. このとき, 命題 2.3 から,

$$\left(\int_{\Omega} |v - \bar{v}|^{3ap} \rho dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_6^{\frac{p^*}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho dx \right)^{\frac{p^*}{2p}}.$$

ここで, $3bp' = 2$, $\frac{p^*}{2p} < 1$ が成り立つと仮定する. このとき, Young の不等式から

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho dx \right)^{\frac{p^*}{2p}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{p^*}{2p} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho dx + \left(1 - \frac{p^*}{2p} \right) \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho dx \right)^{\frac{1}{p'} \left(1 - \frac{p^*}{2p} \right)^{-1}}.$$

次に (19) の右辺の 2 項目を考える. Ω は有界領域で ρ は正值で有界であるため, Hölder の不等式から

$$\left(\int_{\Omega} |\bar{v}|^{p^*} \rho dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\bar{v}|^{\frac{p^*}{p}} \leq \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |v| dx \right)^{\frac{p^*}{p}} \leq \left(\frac{1}{|\Omega| C_1} \int_{\Omega} |v| \rho dx \right)^{\frac{p^*}{p}} \leq \left(\frac{1}{|\Omega| C_1} \right)^{\frac{p^*}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho dx \right)^{\frac{p^*}{2p}}$$

が成り立つ。よって (19) に代入すると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v|^3 \rho \, dx &\leq 2^{\frac{3a-1}{p}} C_6^{\frac{p^*}{p}} \frac{p^*}{2p} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho \, dx + 2^{\frac{3a-1}{p}} C_6^{\frac{p^*}{p}} \left(1 - \frac{p^*}{2p}\right) \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho \, dx\right)^{\frac{1}{p'}(1-\frac{p^*}{2p})^{-1}} \\ &\quad + 2^{\frac{3a-1}{p}} \left(\frac{1}{|\Omega|C_1}\right)^{\frac{p^*}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho \, dx\right)^{\frac{p^*}{2p}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho \, dx\right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

が得られる。それぞれの条件を整理すると、 $n \geq 3$ のとき、

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{3a}{p^*} + \frac{3b}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{3a}{n} + \frac{3b}{2}$$

から、 $a = \frac{n}{6}$ が得られる。 $\frac{p^*}{2p} < 1$ より、 $n < 4$ となる。

$n = 1, 2$ のとき、 $2 \leq p^* < \infty$ から $p^* = 6$ とおけばよい。この時、 $a = b = \frac{1}{2}$ となることから、

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad 3bp' = 2 \Leftrightarrow p' = \frac{4}{3}, \quad p = 4, \quad p^* = 6, \quad \frac{1}{p'} \left(1 - \frac{p^*}{2p}\right)^{-1} = 3$$

となる。

$$\int_{\Omega} |v|^3 \rho \, dx \leq 2^{\frac{1}{8}} C_6^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \rho \, dx + 2^{\frac{1}{8}} C_6^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho \, dx\right)^3 + 2^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{|\Omega|C_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \rho \, dx\right)^{\frac{3}{2}}$$

が成り立つ。 $\square$

これらをまとめると以下が成り立つ。

補題 2.5. ρ は (NFP) の正值で有界な古典解とする。このとき、 $\|\nabla d\|_{\infty}$, $\|\nabla \phi\|_{\infty}$, $\|\rho^{\alpha-1}\|_{\infty}$ に依存する定数 C_{11} , C_{12} , C_{13} , $C_{14} > 0$ が存在して以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) &\geq \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{\min_{x \in \Omega} d(x)}\right) \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx + \left((\alpha - 1) - \frac{C_{12}}{\min_{x \in \Omega} d(x)}\right) I_2 \\ &\quad - \frac{C_{13}}{\min_{x \in \Omega} d(x)} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx\right)^3 - \frac{C_{14}}{\min_{x \in \Omega} d(x)} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

証明. (16), (17), 補題 2.2 から、 ρ の t での 2 階導関数は以下のように評価できる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) &\geq \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{\min_{x \in \Omega} d(x)}\right) \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx + (\alpha - 1) I_2 \\ &\quad - \frac{2\|\nabla d\|_{\infty}}{(\alpha - 1) \min_{x \in \Omega} d(x)} \int_{\Omega} |\nabla \mu|^3 \rho \, dx. \end{aligned} \quad (21)$$

補題 2.4 から

$$\int_{\Omega} |\nabla \mu|^3 \rho \, dx \leq C_8 I_2 + C_9 \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx\right)^3 + C_{10} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx\right)^{\frac{3}{2}}$$

が得られる。よってまとめると C_{12} , C_{13} , $C_{14} > 0$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) &\geq \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{\min_{x \in \Omega} d(x)}\right) \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx + \left((\alpha - 1) - \frac{C_{12}}{\min_{x \in \Omega} d(x)}\right) I_2 \\ &\quad - \frac{C_{13}}{\min_{x \in \Omega} d(x)} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx\right)^3 - \frac{C_{14}}{\min_{x \in \Omega} d(x)} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

が得られる. □

補題 2.6. ρ は (NFP) の正值で有界な時間大域的古典解, このとき, $d(x) > C_3$ とすると, ある定数 $C_{13}, C_{14} > 0$ に対して以下が成り立つ.

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) \geq \lambda \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx - C_{13} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx \right)^{\frac{3}{2}} - C_{14} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx \right)^3.$$

証明. (20) から,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) &\geq \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{C_3} \right) \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx + \left((\alpha - 1) - \frac{C_{12}}{C_3} \right) I_2 \\ &\quad - \frac{C_{13}}{C_3} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx \right)^3 - \frac{C_{14}}{C_3} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

が得られる.

$$\left(2\lambda - \frac{C_{11}}{C_3} \right) \geq \lambda, \quad \left((\alpha - 1) - \frac{C_{12}}{C_3} \right) \geq 0$$

となるように $d(x)$ を大きくとると, $\mathcal{F}[\rho](t)$ の t の 2 階導関数は

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}[\rho](t) \geq \lambda \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx - C_{13} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx \right)^{\frac{3}{2}} - C_{14} \left(\int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx \right)^3$$

となる. □

定理 1.3 の証明.

$$g(t) := \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \rho \, dx$$

と定義する. (2.6) と $\frac{d}{dt} \mathcal{F}[\rho](t)$ から以下が成り立つ,

$$\frac{d}{dt} g(t) \leq -\lambda g(t) + C_{13} g(t)^{\frac{3}{2}} + C_{14} g(t)^3 \quad (22)$$

(22) に対して Gronwall 型の微分不等式により, 定理 1.3 が得られる. □

2.2 定理 1.5 の証明

定理 1.5 を示すためには (NFP) に対する最大値原理の証明をなぞることである. (NFP) の第一式目を非発散型で表すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\rho - G(\nabla\rho) - \rho\Delta\phi + \alpha\rho^{\alpha}\Delta d = 0$$

となる. すると方程式には ρ の 0 階の微分項が現れるため, ρ と $\Delta\phi$, Δd の関係を考察する必要がある. この考察を避けるために $\mu = \alpha d\rho^{\alpha-1} + \phi$ についての方程式を立てる. (NFP) の第一式目を μ を用いて表すと $\rho_t - \operatorname{div}(\rho\nabla\mu) = 0$ が成り立つから

$$\begin{aligned} \mu_t &= \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-2}\rho_t \\ &= \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-2}\operatorname{div}(\rho\nabla\mu) \\ &= \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-2}\nabla\rho \cdot \nabla\mu \end{aligned}$$

となる． $\nabla\mu = \alpha(\nabla d)\rho^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)d\rho^{\alpha-2}\nabla\rho + \nabla\phi$ が成り立つから， μ の方程式は

$$\mu_t - \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi) \cdot \nabla\mu + |\nabla\mu|^2 = 0 \quad (23)$$

となる． この方程式には μ の 0 階微分の項が現れない． したがって， ρ を与えられた関数として μ についての方程式に対する最大値原理を導出する．

補題 2.7. $\alpha d\rho_0^{\alpha-1} > \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y) - \phi$ が成り立つと仮定する． このとき

$$\min_{y \in \bar{\Omega}} \mu(y, 0) \leq \min_{(y,t) \in \Omega \times [0,T]} \mu(y, t)$$

が成り立つ．

証明. 初めに

$$\min_{(y,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]} \mu(y, t) = \min_{(y,t) \in \Omega \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times [0,T]} \mu(y, t)$$

を示す． μ の方程式は $|\nabla\mu|^2 > 0$ から以下のようになる．

$$\mu_t - \alpha(\alpha-1)d\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi) \cdot \nabla\mu \geq 0.$$

したがって，

$$L[\mu] := -\alpha(\alpha-1)d\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi) \cdot \nabla\mu$$

と定義すると， 方程式は μ は

$$\mu_t + L[\mu] \geq 0 \quad (24)$$

をみたす． すなわち， μ は線形方程式 $\mu_t + L[\mu] = 0$ の優解になる． したがって， 線形放物型方程式の最大値原理 [3] から

$$\min_{(y,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]} \mu(y, t) = \min_{(y,t) \in \Omega \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times [0,T]} \mu(y, t)$$

が成り立つ． 次に， 境界で最小値にならないことを背理法を用いて示す． ある最小値をとる点 $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times [0, T]$ が存在したとする． このとき， Hopf の補題から

$$\frac{\partial\mu}{\partial\nu}(x_0, t_0) < 0 \quad (25)$$

が成り立つ． しかし， (NFP) の境界条件から矛盾． よって

$$\min_{y \in \bar{\Omega}} \mu(y, 0) \leq \mu(x, t) \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$$

が成り立つ． □

次に μ の上からの評価を考える．

補題 2.8. $\alpha d\rho_0^{\alpha-1} > \max_{y \in \bar{\Omega}} \phi(y) - \phi$ が成り立つと仮定する． このとき，

$$\mu(x, t) \leq \max_{(y,t) \in \Omega \times [0,\infty)} \mu(y, t), \quad \text{for } x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty) \quad (26)$$

証明. $\beta > 0$ に対して $\eta = e^{\beta\mu}$ とおくと

$$\eta_t = \beta e^{\beta\mu} \mu_t, \quad \nabla \eta = \beta e^{\beta\mu} \nabla \mu, \quad \Delta \eta = \beta e^{\beta\mu} \Delta \mu + \beta^2 e^{\beta\mu} |\nabla \mu|^2$$

が成り立つことから, (23) に代入すると

$$\eta_t - \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\eta - \beta(1 - \alpha(\alpha - 1)d(x)\beta\rho^{\alpha-1})|\nabla\mu|^2 + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla D + \nabla\phi) \cdot \nabla\eta = 0 \quad (27)$$

が得られる. ここで, ρ の下からの評価より, ある ρ_0 , d , ϕ , α にのみ依存する正の定数 $C > 0$ が存在して $\alpha d(x)\rho^{\alpha-1} \geq C$ が成り立つので, $1 - \alpha(\alpha - 1)\beta d(x)\rho^{\alpha-1} \leq 0$ となるように β を十分大きくとることで

$$\eta_t - \alpha(\alpha - 1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\eta + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi) \cdot \nabla\eta \leq 0 \quad (28)$$

すなわち, η はある線形放物型方程式の劣解となる. 従って, 下からの評価と同様の線形方程式の議論 [3, 4, 7] により, η について最大値原理

$$\eta(x, t) \leq \max_{y \in \Omega} \eta(y, 0) \quad (29)$$

が成り立つ. $\eta > 0$ より, (29) の両辺に対数を取ることで μ についての上からの評価が得られる. $\square$

参考文献

- [1] J. A. Carrillo, A. Jüngel, P. A. Markowich, G. Toscani, and A. Unterreiter. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. *Monatsh. Math.*, 133(1):1–82, 2001.
- [2] Y. Epshteyn, C. Liu, C. Liu, and M. Mizuno. Nonlinear inhomogeneous Fokker-Planck models: energetic-variational structures and long-time behavior. *Anal. Appl. (Singap.)*, 20(6):1295–1356, 2022.
- [3] L. C. Evans. *Partial differential equations*, Vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [5] A. Jüngel. *Entropy methods for diffusive partial differential equations*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, [Cham], 2016.
- [6] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*, Vol. 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.
- [7] M. H. Protter and H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1984. Corrected reprint of the 1967 original.